Física Computacional I
Aula de Revisão 2

Josiel Mendonça Soares de Souza

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Departamento de Física Teórica e Experimental

12 de Agosto de 2021

Tópicos da Aula de Hoje

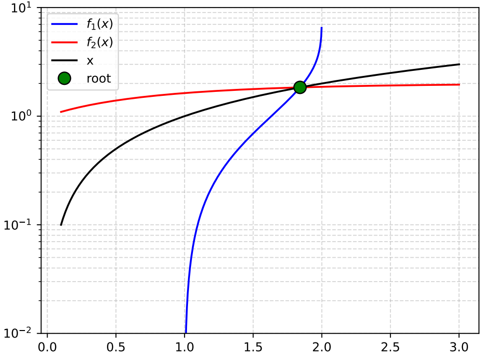
1. Resolução de Sistemas de Equações Não Lineares
   - Método da Relaxação
   - Método da Bissecção
   - Método de Newton
2. Máximos e Mínimos de Funções
   - Método da Seção Áurea
   - Método de Gauss-Newton
3. Resolução de Sistemas de Equações Lineares
   - Eliminação Gaussiana
   - Pivotamento

1.) Resolução de Sistemas de Equações Não Lineares

Método da Relaxação

Começamos com a seguinte equação:

$$x - 2 + e^{-x} = 0$$



Raíz: $x^* = 1.8414$

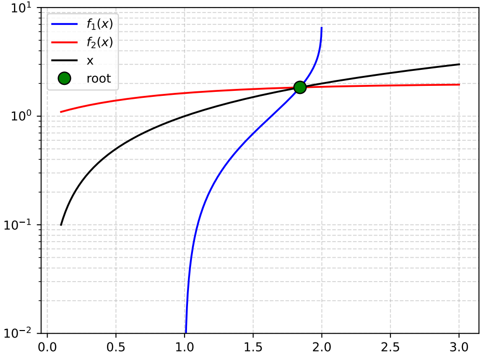
Método da Relaxação

Começamos com a seguinte equação:

$$x - 2 + e^{-x} = 0$$

Podemos expressar essa equação de duas formas ao isolar x:

$$x = -ln(2 - x) \qquad e \qquad x = 2 - e^{-x}$$



Raíz: $x^* = 1.8414$

Método da Relaxação

Começamos com a seguinte equação:

$$x - 2 + e^{-x} = 0$$

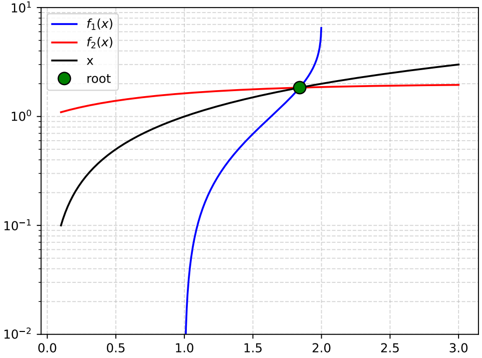
Podemos expressar essa equação de duas formas ao isolar x:

$$x = -ln(2 - x) \qquad e \qquad x = 2 - e^{-x}$$

Temos, assim duas funções diferentes dos quais queremos igualar a x para encontrar a raíz:

$$f_1(x) \equiv -ln(2 - x) \quad , \quad f_2(x) = 2 - e^{-x}$$

$$f(x^*) - x^* = 0 \Rightarrow x^* = f(x^*)$$



Raíz: $x^* = 1.8414$

Método da Relaxação

Começamos com a seguinte equação:

$$x - 2 + e^{-x} = 0$$

Podemos expressar essa equação de duas formas ao isolar x:

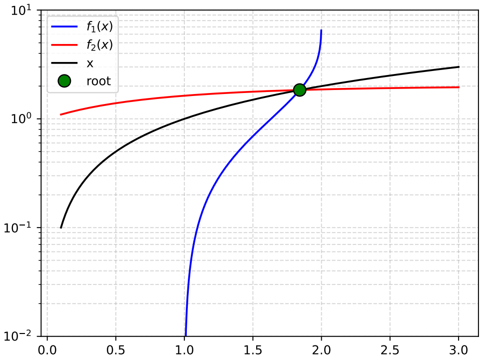
$$x = -ln(2 - x) \qquad e \qquad x = 2 - e^{-x}$$

Temos, assim duas funções diferentes dos quais queremos igualar a x para encontrar a raíz:

$$f_1(x) \equiv -ln(2 - x) \quad , \quad f_2(x) = 2 - e^{-x}$$

$$f(x^*) - x^* = 0 \Rightarrow x^* = f(x^*)$$

$$\boxed{x_{i+1} = f(x_i)} \tag{1}$$

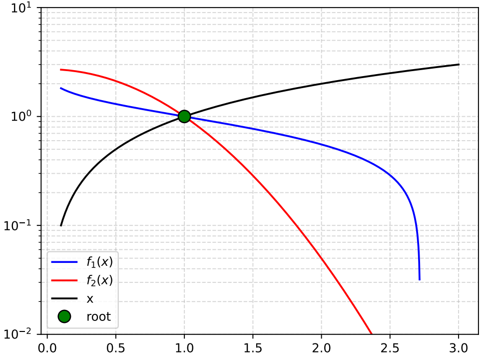


Raíz: $x^* = 1.8414$

Método da Relaxação

Testando outra equação:

$$ln(x) + x^2 - 1 = 0$$



Raíz: $x^* = 1$

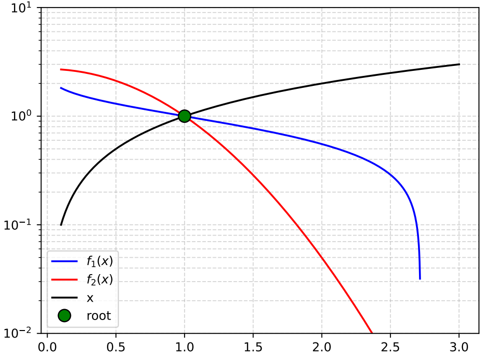
Método da Relaxação

Testando outra equação:

$$ln(x) + x^2 - 1 = 0$$

Podemos expressar essa equação de duas formas ao isolar x:

$$x = \sqrt{1 + ln(x)} \qquad e \qquad x = e^{1+x^2}$$



Raíz: $x^* = 1$

Método da Relaxação

Testando outra equação:

$$ln(x) + x^2 - 1 = 0$$

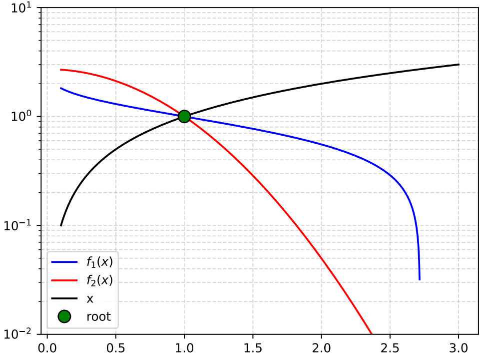
Podemos expressar essa equação de duas formas ao isolar x:

$$x = \sqrt{1 + ln(x)} \qquad e \qquad x = e^{1+x^2}$$

Temos, assim duas funções diferentes dos quais queremos igualar a x para encontrar a raíz:

$$f_1(x) \equiv \sqrt{1 - ln(x)} \quad , \quad f_2(x) = e^{1-x^2}$$

$$f(x^*) - x^* = 0 \Rightarrow x^* = f(x^*)$$



Raíz: $x^* = 1$

Método da Relaxação

Testando outra equação:

$$ln(x) + x^2 - 1 = 0$$

Podemos expressar essa equação de duas formas ao isolar x:

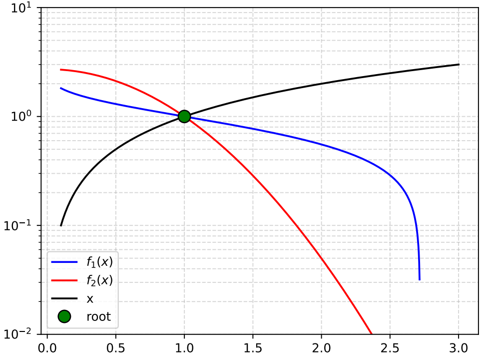
$$x = \sqrt{1 + ln(x)} \qquad e \qquad x = e^{1+x^2}$$

Temos, assim duas funções diferentes dos quais queremos igualar a x para encontrar a raíz:

$$f_1(x) \equiv \sqrt{1 - ln(x)} \quad , \quad f_2(x) = e^{1-x^2}$$

$$f(x^*) - x^* = 0 \Rightarrow x^* = f(x^*)$$

$$\boxed{x_{i+1} = f(x_i)}$$



Raíz: $x^* = 1$

Método da Relaxação

Critério de Convergência [Série de Taylor]

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=x_0} (x - x_0)^n}$$

Método da Relaxação

Critério de Convergência [Série de Taylor]

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=x_0} (x - x_0)^n}$$

$$\underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} = \underbrace{f(x^*)}_{=x^*} + f'(x^*) \cdot (x_n - x^*) + \ldots$$

Método da Relaxação

Critério de Convergência [Série de Taylor]

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=x_0} (x - x_0)^n}$$

$$\underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} = \underbrace{f(x^*)}_{=x^*} + f'(x^*) \cdot (x_n - x^*) + \ldots$$

$$(x_{n+1} - x^*) \approx f'(x^*) \cdot (x_n - x^*)$$

Método da Relaxação

Critério de Convergência [Série de Taylor]

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=x_0} (x - x_0)^n}$$

$$\underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} = \underbrace{f(x^*)}_{=x^*} + f'(x^*) \cdot (x_n - x^*) + \ldots$$

$$(x_{n+1} - x^*) \approx f'(x^*) \cdot (x_n - x^*)$$

Para nosso método convergir para a raiz precisamos que:

$$(x_{n+1} - x^*) < (x_n - x^*) \Rightarrow x_{n+1} < x_n$$

Método da Relaxação

Critério de Convergência [Série de Taylor]

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}\bigg|_{x=x_0} (x - x_0)^n}$$

$$\underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} = \underbrace{f(x^*)}_{=x^*} + f'(x^*) \cdot (x_n - x^*) + \dots$$

$$(x_{n+1} - x^*) \approx f'(x^*) \cdot (x_n - x^*)$$

Para nosso método convergir para a raiz precisamos que:

$$(x_{n+1} - x^*) < (x_n - x^*) \Rightarrow x_{n+1} < x_n$$

$$\boxed{f'(x^*) < 1}$$

Método da Bissecção

Encontrando a raíz da seguinte função:

$$f(x) = x - 2 + e^{-x}$$

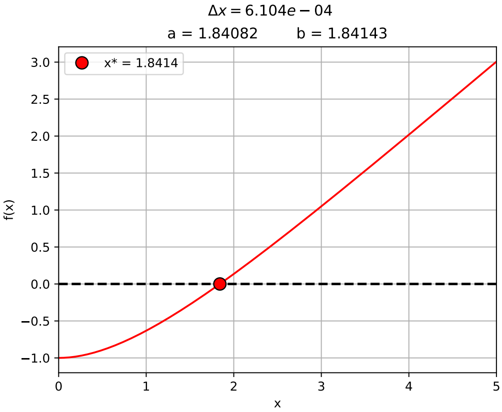
Método da Bissecção

Encontrando a raíz da seguinte função:

$$f(x) = x - 2 + e^{-x}$$

Algorítmo:

1) Faça: $C = (a + b)/2$



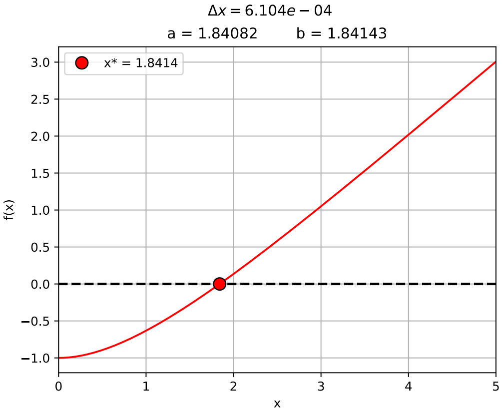
Método da Bissecção

Encontrando a raíz da seguinte função:

$$f(x) = x - 2 + e^{-x}$$

Algorítmo:

1) Faça: $C = (a+b)/2$
2) Se $f(C) \cdot f(a) > 0$: $a = C$



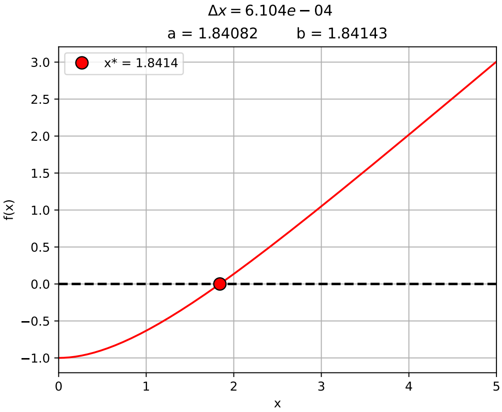
Método da Bissecção

Encontrando a raíz da seguinte função:

$$f(x) = x - 2 + e^{-x}$$

Algorítmo:

1) Faça: $C = (a+b)/2$
2) Se $f(C) \cdot f(a) > 0$: $a = C$
3) Senão: $b = C$



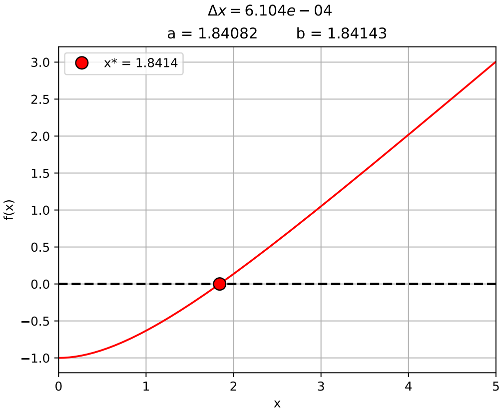
Método da Bissecção

Encontrando a raíz da seguinte função:

$$f(x) = x - 2 + e^{-x}$$

Algorítmo:

1) Faça: $C = (a+b)/2$
2) Se $f(C) \cdot f(a) > 0$: $a = C$
3) Senão: $b = C$
4) Calcule: $\Delta x \equiv |b - a|$



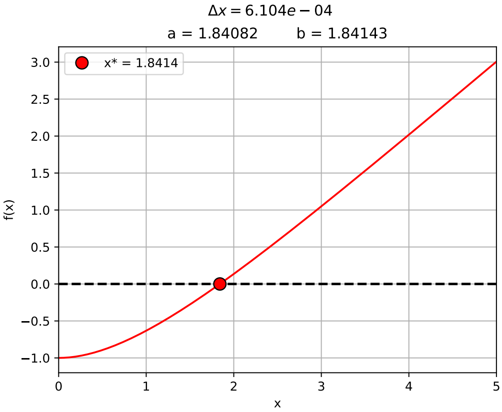
Método da Bissecção

Encontrando a raíz da seguinte função:

$$f(x) = x - 2 + e^{-x}$$

Algorítmo:

1) Faça: $C = (a + b)/2$
2) Se $f(C) \cdot f(a) > 0$: $a = C$
3) Senão: $b = C$
4) Calcule: $\Delta x \equiv |b - a|$
5) Se $\Delta x > Eps$: repita os passos anteriores



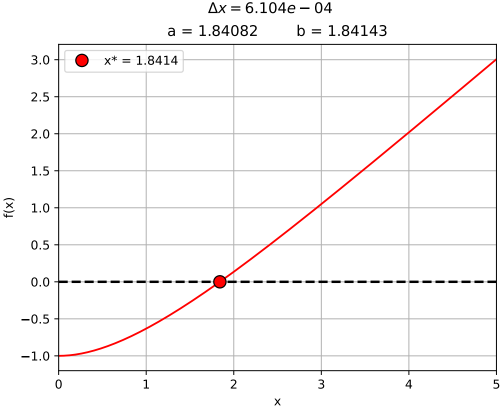
Método da Bissecção

Encontrando a raíz da seguinte função:

$$f(x) = x - 2 + e^{-x}$$

Algorítmo:

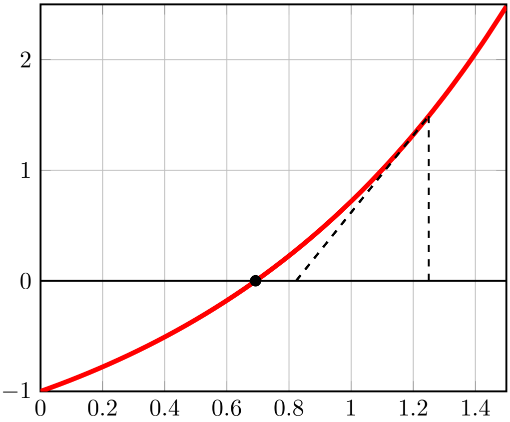
1) Faça: $C = (a + b)/2$
2) Se $f(C) \cdot f(a) > 0$: $a = C$
3) Senão: $b = C$
4) Calcule: $\Delta x \equiv |b - a|$
5) Se $\Delta x > Eps$: repita os passos anteriors
6) Senão: Obtermos $C \approx x^*$



Método de Newton

Newton-Raphson Method

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^* - x} \Rightarrow \boxed{x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

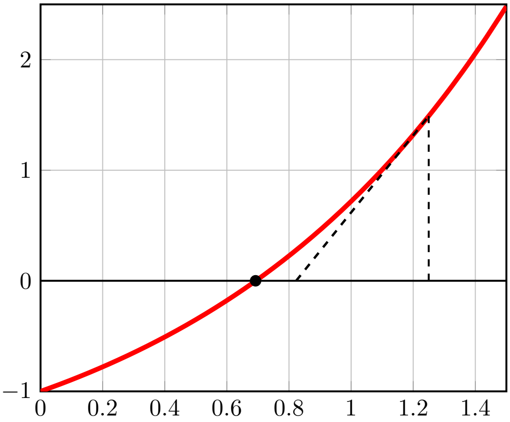


Método de Newton

Newton-Raphson Method

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^* - x} \Rightarrow \boxed{x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \tag{2}$$



Método de Newton

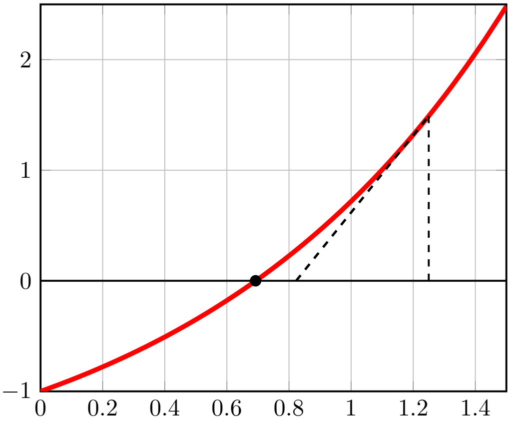
Newton-Raphson Method

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^* - x} \Rightarrow \boxed{x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (2)$$

Série de Taylor

$$\underbrace{f(x^*)}_{=0} = f(x) + f'(x) \cdot (x^* - x) + O(2)$$

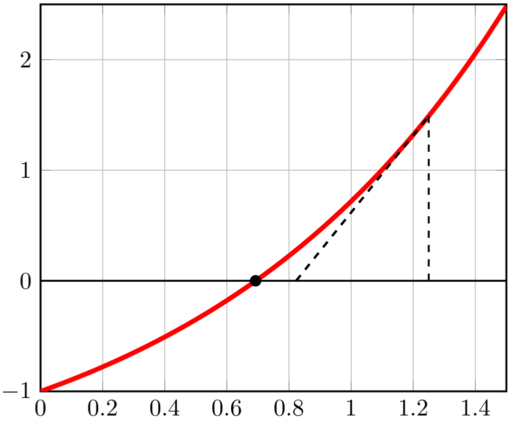


Método de Newton

Newton-Raphson Method

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^* - x} \Rightarrow \boxed{x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (2)$$



Série de Taylor

$$\underbrace{f(x^*)}_{=0} = f(x) + f'(x) \cdot (x^* - x) + O(2)$$

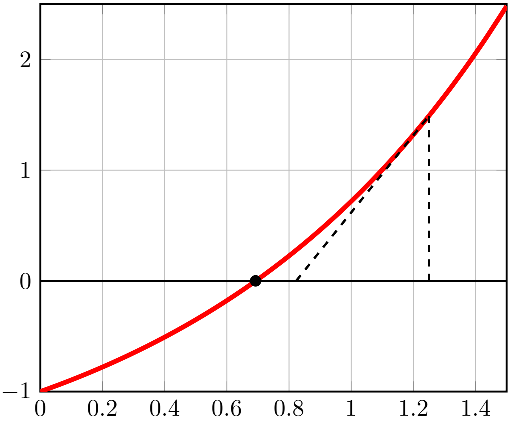
$$f(x) + f'(x) \cdot (x^* - x) = 0$$

Método de Newton

Newton-Raphson Method

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^* - x} \Rightarrow \boxed{x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (2)$$



Série de Taylor

$$\underbrace{f(x^*)}_{=0} = f(x) + f'(x) \cdot (x^* - x) + O(2)$$

$$f(x) + f'(x) \cdot (x^* - x) = 0$$

$$x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Métodos I

- **Relaxação:** $x_{n+1} = f(x_n)$
- **Bisseção:** $c = (a+b)/2$; Se $(f(c) \cdot f(a) > 0)$: a=c ; Senão: b=c ;
  Se $(\Delta x > Eps)$: Repita ; Senão: $x^* \approx c$
- **Newton:** $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; Se $(|x_n - x_{n+1}| > Eps)$: Repita ; Senão $x^* \approx x_{n+1}$

2.) Máximos e Mínimos de Uma Função

Método da Seção Áurea

Critério 1

$$\boxed{(x_4 - x_2) = (x_3 - x_1)} \tag{3}$$

Método da Seção Áurea

Critério 1

$$\boxed{(x_4 - x_2) = (x_3 - x_1)} \tag{3}$$

Mesma Redução Relativa no Tamanho do Intervalo

$$\boxed{z = \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}} \tag{4}$$

Método da Seção Áurea

Critério 1

$$\boxed{(x_4 - x_2) = (x_3 - x_1)} \tag{3}$$

Mesma Redução Relativa no Tamanho do Intervalo

$$\boxed{z = \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}} \tag{4}$$

$$z = \frac{(x_3 + x_2 - x_1) - x_1}{x_3 - x_1} = 1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

Método da Seção Áurea

Critério 1

$$\boxed{(x_4 - x_2) = (x_3 - x_1)} \tag{3}$$

Mesma Redução Relativa no Tamanho do Intervalo

$$\boxed{z = \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}} \tag{4}$$

$$z = \frac{(x_3 + x_2 - x_1) - x_1}{x_3 - x_1} = 1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

$$z = 1 - \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 - z - 1 = 0$$

Método da Seção Áurea

Critério 1

$$\boxed{(x_4 - x_2) = (x_3 - x_1)} \tag{3}$$

Mesma Redução Relativa no Tamanho do Intervalo

$$\boxed{z = \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}} \tag{4}$$

$$z = \frac{(x_3 + x_2 - x_1) - x_1}{x_3 - x_1} = 1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

$$z = 1 - \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 - z - 1 = 0$$

$$\boxed{z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \tag{5}$$

Método da Seção Áurea

Critério 1

$$\boxed{(x_4 - x_2) = (x_3 - x_1)} \qquad (3)$$

Mesma Redução Relativa no Tamanho do Intervalo

$$\boxed{z = \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}} \qquad (4)$$

$$z = \frac{(x_3 + x_2 - x_1) - x_1}{x_3 - x_1} = 1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

$$z = 1 - \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 - z - 1 = 0$$

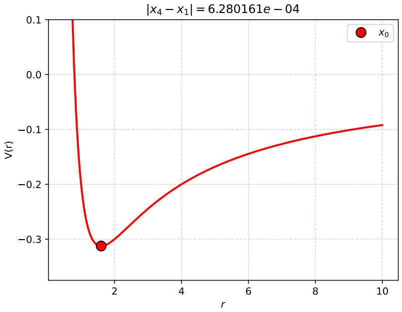
$$\boxed{z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \qquad (5)$$

$$\boxed{x_3 = x_1 + \frac{x_4 - x_1}{z}} \qquad \boxed{x_2 = x_4 - x_3 + x_1}$$

Método da Seção Áurea

Algorítmo

1) Definimos os extremos ($x_1 = a$, $x_4 = b$)



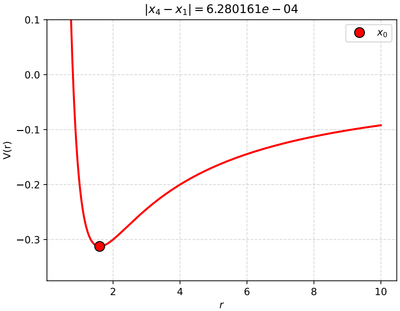
$$x^* \approx (x_4 + x_1)/2$$

Método da Seção Áurea

Algorítmo

1) Definimos os extremos ($x_1 = a$, $x_4 = b$)
2) Adicionamos um ponto no interior do intervalo ($x_1 < x_3 < x_4$)

$$x_3 = x_1 + \frac{x_4 - x_1}{z} \quad , \quad z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



$$x^* \approx (x_4 + x_1)/2$$

Método da Seção Áurea

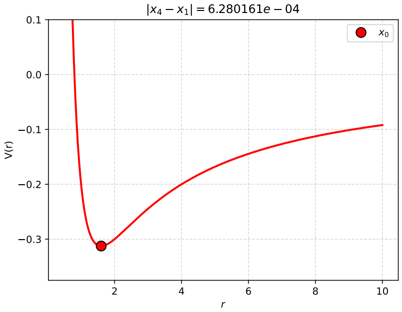
Algorítmo

1) Definimos os extremos ($x_1 = a$, $x_4 = b$)
2) Adicionamos um ponto no interior do intervalo ($x_1 < x_3 < x_4$)

$$x_3 = x_1 + \frac{x_4 - x_1}{z} \quad , \quad z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3) Adicionamos mais um ponto x_2:

$$x_2 = x_4 - x_3 + x_1$$



$$x^* \approx (x_4 + x_1)/2$$

Método da Seção Áurea

Algorítmo

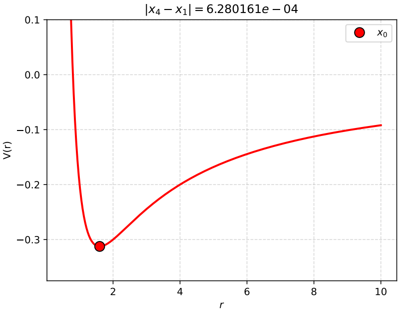
1) Definimos os extremos ($x_1 = a$, $x_4 = b$)
2) Adicionamos um ponto no interior do intervalo ($x_1 < x_3 < x_4$)

$$x_3 = x_1 + \frac{x_4 - x_1}{z} \quad , \quad z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3) Adicionamos mais um ponto x_2:

$$x_2 = x_4 - x_3 + x_1$$

4) Verificamos, Se $f(x_2) < f(x_3)$ então: $x_4 = x_3$, $x_3 = x_2$ e $x_2 = x_4 - x_3 + x_1$;



$$x^* \approx (x_4 + x_1)/2$$

Método da Seção Áurea

Algorítmo

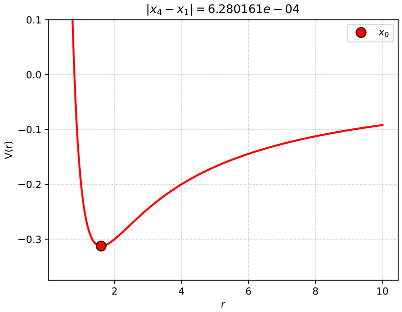
1) Definimos os extremos ($x_1 = a$, $x_4 = b$)
2) Adicionamos um ponto no interior do intervalo ($x_1 < x_3 < x_4$)

$$x_3 = x_1 + \frac{x_4 - x_1}{z} \quad , \quad z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3) Adicionamos mais um ponto x_2:

$$x_2 = x_4 - x_3 + x_1$$

4) Verificamos, Se $f(x_2) < f(x_3)$ então: $x_4 = x_3$, $x_3 = x_2$ e $x_2 = x_4 - x_3 + x_1$;
5) Senão: $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$ e $x_3 = x_1 + (x_4 - x_1)/z$



$$x^* \approx (x_4 + x_1)/2$$

Método da Seção Áurea

Algorítmo

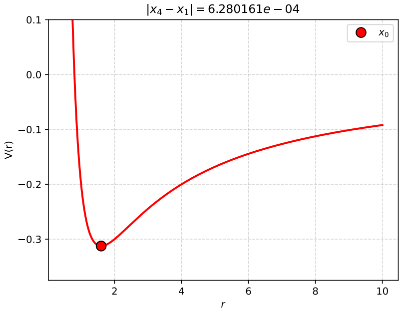
1) Definimos os extremos ($x_1 = a$, $x_4 = b$)
2) Adicionamos um ponto no interior do intervalo ($x_1 < x_3 < x_4$)

$$x_3 = x_1 + \frac{x_4 - x_1}{z} \quad , \quad z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3) Adicionamos mais um ponto x_2:

$$x_2 = x_4 - x_3 + x_1$$

4) Verificamos, Se $f(x_2) < f(x_3)$ então: $x_4 = x_3$, $x_3 = x_2$ e $x_2 = x_4 - x_3 + x_1$;
5) Senão: $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$ e $x_3 = x_1 + (x_4 - x_1)/z$
6) Calculamos: $\Delta x = |x_4 - x_1|$



$$x^* \approx (x_4 + x_1)/2$$

Método da Seção Áurea

Algorítmo

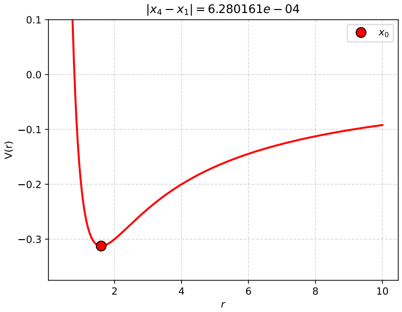
1) Definimos os extremos ($x_1 = a$, $x_4 = b$)
2) Adicionamos um ponto no interior do intervalo ($x_1 < x_3 < x_4$)

$$x_3 = x_1 + \frac{x_4 - x_1}{z} \quad , \quad z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3) Adicionamos mais um ponto x_2:

$$x_2 = x_4 - x_3 + x_1$$

4) Verificamos, Se $f(x_2) < f(x_3)$ então: $x_4 = x_3$, $x_3 = x_2$ e $x_2 = x_4 - x_3 + x_1$;
5) Senão: $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$ e $x_3 = x_1 + (x_4 - x_1)/z$
6) Calculamos: $\Delta x = |x_4 - x_1|$
7) Se $\Delta x > Eps$ repita os passos anteriores

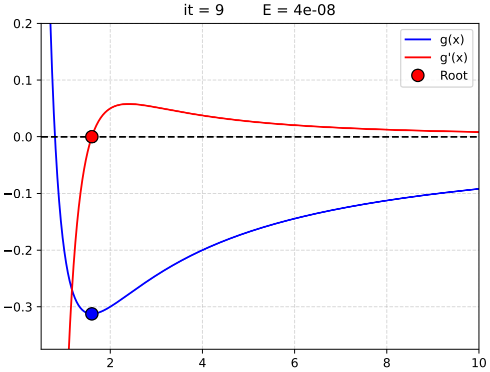


$$x^* \approx (x_4 + x_1)/2$$

Método de Gauss-Newton

Basicamente queremos encontrar a raiz da derivada de uma função, ou seja, estamos encontrando um máximo ou um mínimo.

$$f'(x^*) = 0$$

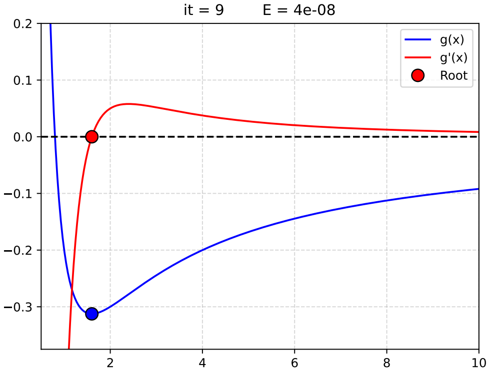


Método de Gauss-Newton

Basicamente queremos encontrar a raiz da derivada de uma função, ou seja, estamos encontrando um máximo ou um mínimo.

$$f'(x^*) = 0$$

Definindo $g(x) \equiv f'(x)$ podemos usar o método de Newton-Raphson de modo que:



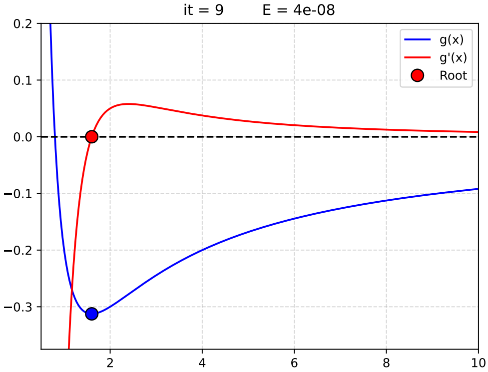
Método de Gauss-Newton

Basicamente queremos encontrar a raiz da derivada de uma função, ou seja, estamos encontrando um máximo ou um mínimo.

$$f'(x^*) = 0$$

Definindo $g(x) \equiv f'(x)$ podemos usar o método de Newton-Raphson de modo que:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}} \qquad (6)$$



Métodos II

- **Seção Áurea:**
  $x_1 = a$, $x_4 = b$, $x_3 = x_1 + \frac{x_4 - x_1}{z}$, $x_2 = x_4 - x_3 + x_1$;
  Se $(f(x_2) < f(x_3))$: $x_4 = x_3$, $x_3 = x_2$, $x_2 = x_4 - x_3 + x_1$;
  Senão: $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $x_3 = x_1 + \frac{x_4 - x_1}{z}$;
  Se$(|x_4 - x_1| > Eps)$: Repita ; Senão $x^* \approx (x_4 + x_1)/2$
- **Gauss-Newton:**
  $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$; Se$(|x_n - x_{n+1}| > Eps)$: Repita ; Senão: $x^* \approx x_{n+1}$

3.) Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Eliminação Gaussiana

Eliminação de *Gauss-Jordan*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

Eliminação de *Gauss-Jordan*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Podemos expressar nosso sistema como uma única matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

Eliminação de *Gauss-Jordan*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Podemos expressar nosso sistema como uma única matrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Procedemos manipular essa matrix de modo a tornar a parte esquerda igual a uma matrix identidade.

Eliminação Gaussiana

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1/2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+3L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1/2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+3L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3+2L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2/0.5]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1-0.5L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1/2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+3L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3+2L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2/0.5]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1-0.5L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3-2L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1\cdot L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1+L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1/2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+3L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3+2L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2/0.5]{} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1-0.5L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3-2L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1\cdot L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1+L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2-L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Logo, $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$

Pivotamento

Em problemas de encontrar a solução de sistemas lineares onde aparecem termos nulos na diagonal da matrix em questão não podemos seguir completamente o método anterior. Precisamos fazer acrescentar um passo a mais envolvendo troca de linhas de matrizes.

Pivotamento

Em problemas de encontrar a solução de sistemas lineares onde aparecem termos nulos na diagonal da matrix em questão não podemos seguir completamente o método anterior. Precisamos fazer acrescentar um passo a mais envolvendo troca de linhas de matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Pivotamento

Em problemas de encontrar a solução de sistemas lineares onde aparecem termos nulos na diagonal da matrix em questão não podemos seguir completamente o método anterior. Precisamos fazer acrescentar um passo a mais envolvendo troca de linhas de matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Mais uma vez podemos expressar esse sitema como uma única matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Pivotamento

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \rightleftharpoons L_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1/3]{} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Pivotamento

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \rightleftharpoons L_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1/3]{} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 - L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -16/3 & 4/3 & 16/3 & 8 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - 2L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -16/3 & 4/3 & 16/3 & 8 \\ 0 & -14/3 & 5/3 & 11/3 & 5 \end{bmatrix}$$

Pivotamento

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \rightleftharpoons L_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1/3]{} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 - L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -16/3 & 4/3 & 16/3 & 8 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - 2L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -16/3 & 4/3 & 16/3 & 8 \\ 0 & -14/3 & 5/3 & 11/3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 - \frac{4}{3}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17/3 & -5/3 & 19/3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -16/3 & 4/3 & 16/3 & 8 \\ 0 & -14/3 & 5/3 & 11/3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1.62} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{-0.43} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{-1.24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1.38} \end{bmatrix}$$

Pivotamento

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \rightleftharpoons L_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1/3]{} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 - L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -16/3 & 4/3 & 16/3 & 8 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - 2L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -16/3 & 4/3 & 16/3 & 8 \\ 0 & -14/3 & 5/3 & 11/3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 - \frac{4}{3}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17/3 & -5/3 & 19/3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & -16/3 & 4/3 & 16/3 & 8 \\ 0 & -14/3 & 5/3 & 11/3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1.62} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{-0.43} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{-1.24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1.38} \end{bmatrix}$$

Solução: $w = 1.62$, $x = -0.43$, $y = -1.24$, $z = 1.38$.